ZORRO

Profesor
Edson Curahua

PITAGORAS
ACADEMIA

GEOMETRÍA

GRUPO PITÁGORAS

CLASE 13: POLIEDROS

POLIEDROS

DEFINICIÓN Y ELEMENTOS

PROPIEDADES

POLIEDROS REGULARES

POLIEDROS

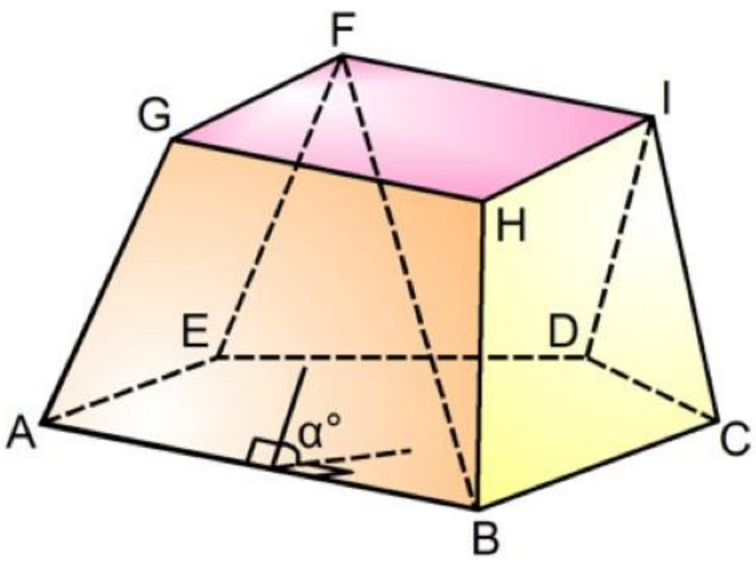
DEFINICIÓN

Un poliedro es la reunión de cuatro o más regiones poligonales tales que cada lado pertenezca a dos de ellas, las cuales deben esta en planos distintos.

Las regiones poligonales que determinan al poliedro se llaman caras del poliedro; los lados de los polígonos son las aristas y los vértices de los mismos son los vértices del poliedro.

Se llaman ángulos diedros del poliedro, los formados por las caras que tienen una arista común; y ángulos sólidos o poliédricos, los formados por varias caras que tienen un vértice común.

Diagonal de un poliedro es el segmento que une dos vértices no situados en una misma cara.



ELEMENTOS:

Vértices: A, B, C, ...

Aristas: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, ...

Caras: AGHB, CDI, ...

Diedros: Diedro AB, Diedro BC, ...

Ángulos Poliedros: Triedro A-BEG, ...

Diagonales: $\overline{FB}$, $\overline{AI}$, ...

POLIEDROS

Un poliedro se designa por sus vértices o por una sola letra. Así, el poliedro de la figura anterior lo denotamos por ABCDEFGHI o simplemente por M.

En el poliedro anterior tenemos una cara triangular, 5 caras cuadrangulares y una cara pentagonal, es decir el poliedro tiene 7 caras; también tiene 9 vértices y 14 aristas.

Los poliedros dividen al espacio del mismo modo que los polígonos dividen al plano, esto es, en un conjunto de puntos interiores, un conjunto de puntos que pertenecen al poliedro y un conjunto de puntos exteriores al poliedro.

CLASIFICACIÓN

Atendiendo al número de caras un poliedro se llama:

Tetraedro, si tiene 4 caras

Pentaedro, si tiene 5 caras

Hexaedro, si tiene 6 caras

Octaedro, si tiene 8 caras

Dodecaedro, si tiene 12 caras

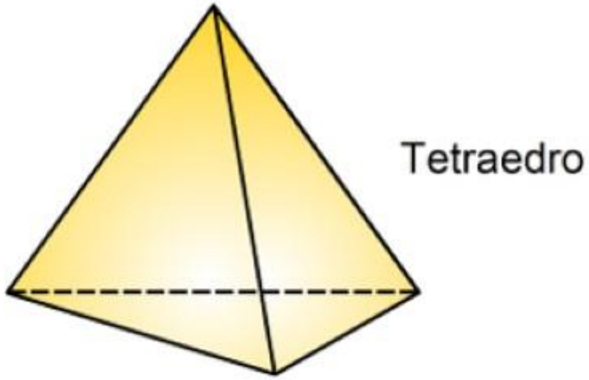
Icosaedro, si tiene 20 caras

En general se dice poliedro de siete, nueve, diez, ... caras. Sin embargo, hay algunos poliedros que toman nombres especiales, como *prisma*, *pirámide*, etc.

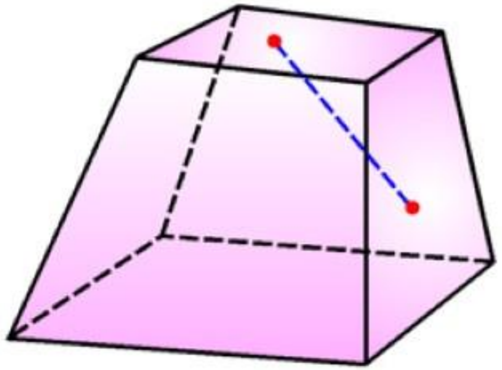
POLIEDROS

NOTA:

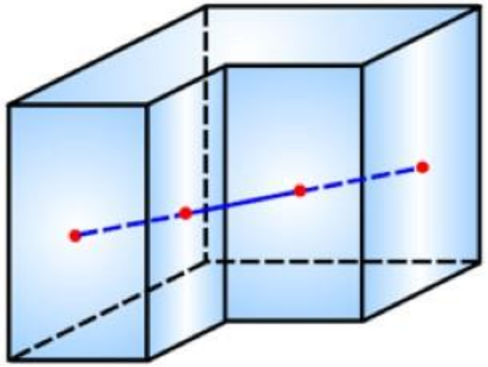
En la figura se muestra un tetraedro, el poliedro de menor número de caras, todas ellas triangulares. Este poliedro también tiene 4 vértices y seis aristas.



Un poliedro se llama convexo si el segmento que une dos puntos cualesquiera del poliedro está en el poliedro o en su interior, en caso contrario el poliedro se llamará no convexo.



Poliedro convexo



Poliedro no convexo

POLIEDROS

PROPIEDADES PARA TODO POLIEDRO CONVEXO

Sean: C, V y A los números de caras, de vértices y de aristas respectivamente de un poliedro convexo.

01. En todo poliedro convexo el número de caras aumentado en el de vértices es igual al número de aristas más 2 (Teorema de Euler).

$$\boxed{C + V = A + 2}$$

Teorema de Euler

Nota:

Existen algunos poliedros no convexos que cumplen con el teorema de Euler.

02. La suma de las medidas de los ángulos de todas las caras de un poliedro convexo, esta dada por la siguiente expresión:

$$\boxed{S_{m\angle s\ Caras} = 360(V - 2)}$$

$$\boxed{S_{m\angle s\ Caras} = 360(A - C)}$$

Nota:

La suma de las medidas de las caras de todos los ángulos sólidos de un poliedro convexo es igual a la suma de las medidas de los ángulos de todas las caras.

$$\boxed{S_{mCaras\ \angle s\ Sólidos} = S_{m\angle s\ Caras}}$$

POLIEDROS

03. El número de aristas de cualquier poliedro es igual a la mitad de la suma de los números de lados de las caras

$$A = \frac{\text{Suma de los números de lados de las caras}}{2}$$

Consecuencias:

a) Si todas las caras de un poliedro convexo están limitadas por polígonos de n lados, entonces:

$$A = \frac{nC}{2}$$

b) Si en cada vértice de un poliedro concurren m aristas, entonces:

$$A = \frac{mV}{2}$$

04. El número de diagonales de un poliedro convexo se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$D_{\text{POLIEDRO}} = C_2^V - A - D_{\text{CARAS}}$$

Observación:

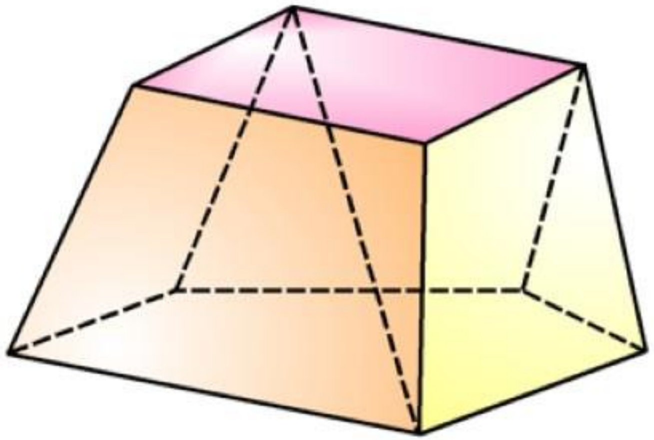
Si en un poliedro convexo se quita una o más caras consecutivas, para el nuevo poliedro abierto se cumple:

$$C + V = A + 1$$

POLIEDROS

APLICACIÓN

En el poliedro anterior apliquemos las propiedades estudiadas:



Se observa que el poliedro está limitado por:

1 cara triangular

5 caras cuadrangulares

1 cara pentagonal

Luego:

$$C = 1 + 5 + 1 = 7$$

$$A = \frac{1(3) + 5(4) + 1(5)}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

Por el teorema de Euler:

$$C + V = A + 2$$

$$7 + V = 14 + 2$$

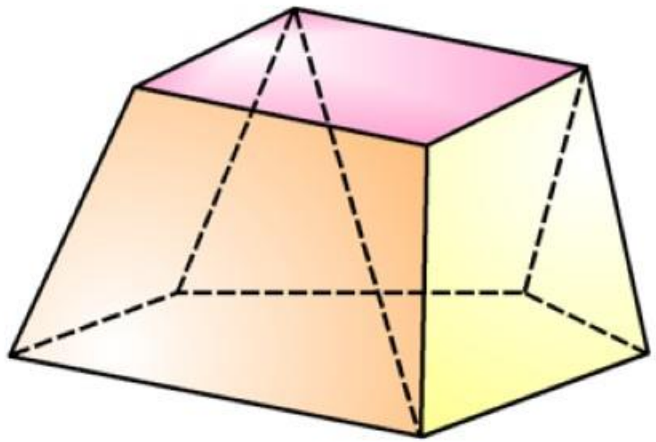
$$V = 9$$

POLIEDROS

APLICACIÓN

Ahora en el poliedro mostrado, se tiene:

$$C = 7,\ \ A = 14 \quad y\ V = 9$$



Calculemos la suma de las medidas de los ángulos de las caras:

$$S_{m\angle s\ Caras} = 180 + 5 \times 360 + 540$$

$$\boxed{S_{m\angle s\ Caras} = 2520}$$

Si usamos la propiedad, tendríamos:

$$S_{m\angle s\ Caras} = 360(9 - 2)$$

$$\boxed{S_{m\angle s\ Caras} = 2520}$$

Calculemos el número de diagonales:

$$\boxed{D_{POLIEDRO} = C_2^V - A - D_{CARAS}}$$

$$D_{POLIEDRO} = C_2^9 - 14 - (0 + 5 \times 2 + 5)$$

$$D_{POLIEDRO} = \frac{9 \times 8}{2} - 14 - 15$$

$$\boxed{\therefore D_{POLIEDRO} = 7}$$

POLIEDROS

Ejemplo

En un hexaedro convexo de nueve aristas y caras congruentes, ¿cuál es el número de lados de cada cara?

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) No existe tal hexaedro

Ejemplo

Un poliedro convexo tiene 5 caras. Entonces el número de vértices es:

A) 5 B) 6 C) 7
D) 5 o 6 E) 6 0 7

POLIEDROS

Ejemplo

En el exterior de un poliedro convexo se toma un punto, el cual se une con los vértices de la cara más próxima; este nuevo poliedro posee 16 aristas, su número de vértices es igual al número de caras, y el número de aristas excede en 4 a las del poliedro inicial. Determine el número de caras del poliedro inicial.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9 (UNI 2018-2)

Ejemplo

Un poliedro convexo está formado por 8 regiones triangulares, 9 regiones cuadrangulares y m regiones pentagonales. Si dicho poliedro tiene 33 vértices, entonces m sería:

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

Ejemplo

Un poliedro convexo tiene por caras cinco regiones pentagonales, tres regiones triangulares y otras regiones cuadrangulares. Si el número de diagonales del poliedro es 70, entonces el número de vértices del poliedro es:

A) 15 B) 16 C) 17
D) 19 E) 20

Ejemplo

Un poliedro convexo esta formado por m caras que son regiones poligonales de n lados y p caras que son regiones poligonales de n+1 lados. Si el número de vértices del poliedro es m+p, calcular el valor de m+n.

A) 3 B) 4 C) 6
D) 7 E) 9

POLIEDROS REGULARES

POLIEDROS REGULARES

Se llama poliedro regular al poliedro convexo de caras regulares y congruentes, además en cada vértice concurren igual número de aristas.

Todo poliedro regular se puede inscribir y circunscribir a esferas concéntricas, siendo el centro de éstas el centro del poliedro regular.

TEOREMA

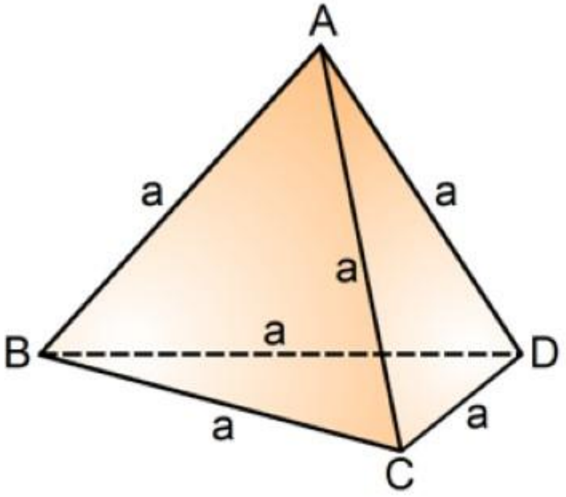
Solo existen cinco poliedros regulares

A continuación detallaremos las características más importantes de los poliedros regulares.

POLIEDROS REGULARES

TETRAEDRO REGULAR

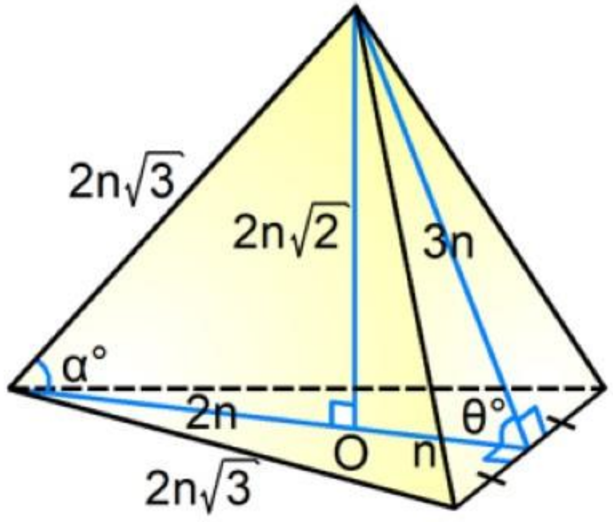
Esta limitado por cuatro regiones triangulares equiláteras unidas de tres en tres.



Tetraedro ABCD

$$\text{Área total} = a^2\sqrt{3}$$

$$\text{Número de caras} = C = 4$$
$$\text{Número de vértices} = V = 4$$
$$\text{Número de aristas} = A = 6$$



Medida de uno de los diedros del tetraedro regular:

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

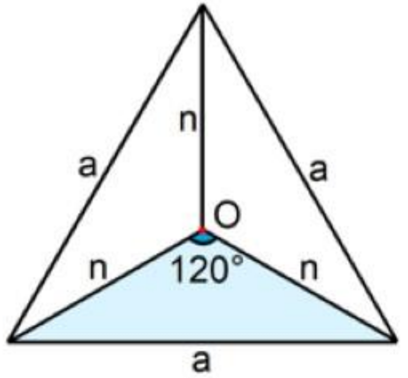
Medida del ángulo que forman una arista lateral con la base:

$$\alpha = \arctan(\sqrt{2})$$

POLIEDROS REGULARES

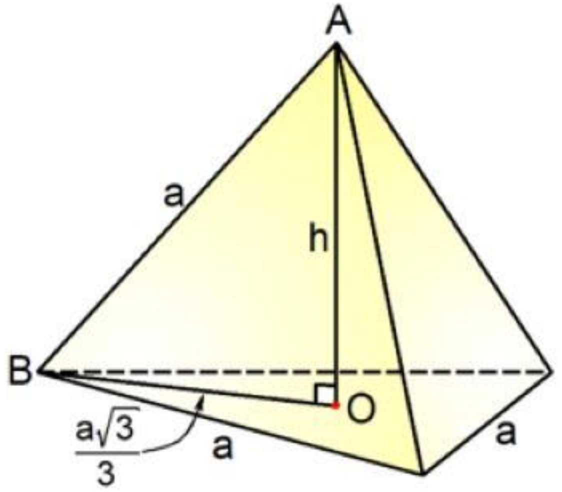
Cálculo de la altura

Recordemos que la altura del tetraedro regular cae en el centro de la base, luego:



$$a = n\sqrt{3}$$

$$n = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



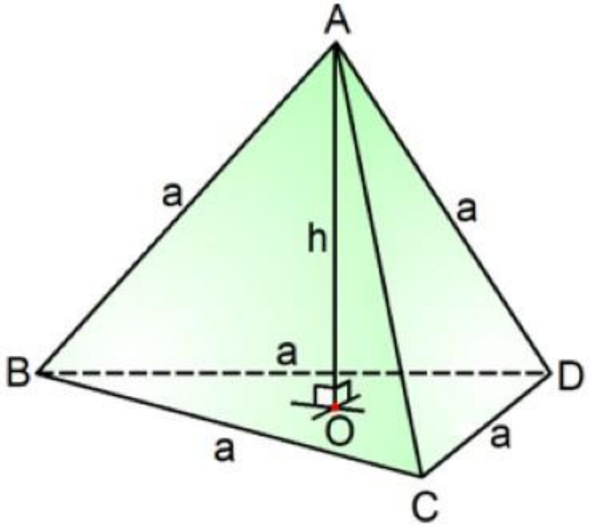
En el triángulo rectángulo AOB:

$$h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2$$

$$\boxed{h = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

Cálculo del volumen

En toda pirámide el volumen es igual a un tercio del área de la base multiplicada por la altura.



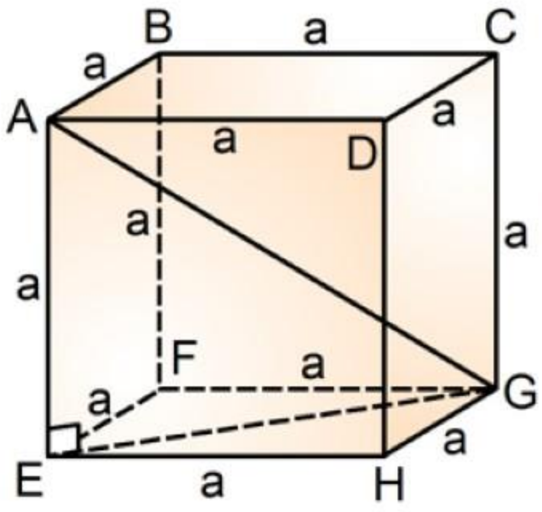
$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\boxed{\therefore \text{Volumen} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$$

POLIEDROS REGULARES

HEXAEDRO REGULAR

Esta limitado por seis regiones cuadradas unidas de tres en tres.

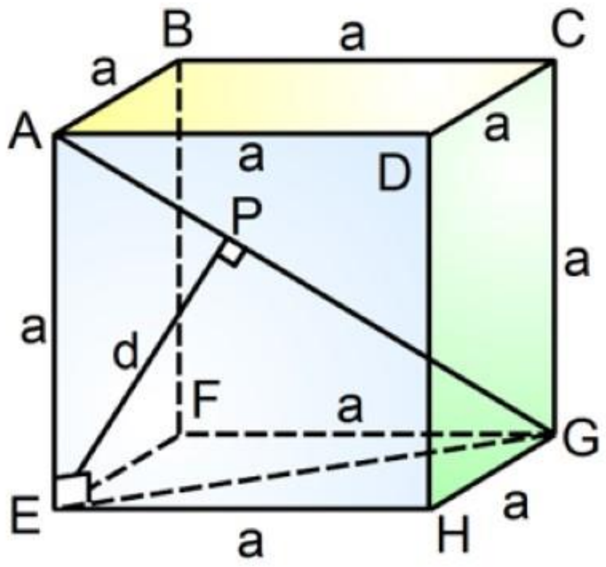


Hexaedro regular ABCD – EFGH

Número de caras = C = 6

Número de vértices = V = 8

Número de aristas = A = 12



$AG = a\sqrt{3}$

$d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

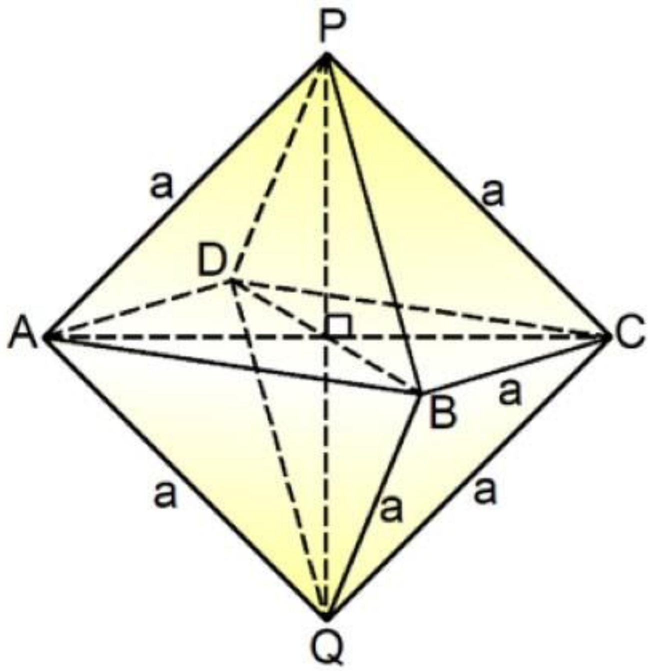
$\text{Área total} = 6a^2$

$\text{Volumen} = a^3$

POLIEDROS REGULARES

OCTAEDRO REGULAR

Esta limitado por ocho regiones triangulares equiláteras unidas de cuatro en cuatro.



$$\text{Número de caras} = C = 8$$

$$\text{Número de vértices} = V = 6$$

$$\text{Número de aristas} = A = 12$$

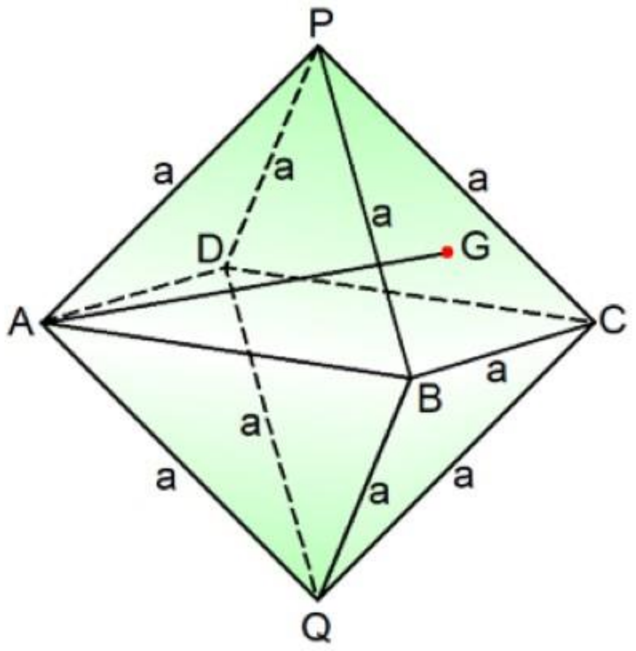
$$\text{Octaedro regular } P - ABCD - Q$$

En el octaedro regular P-ABCD-Q, mostrado en la figura los cuadriláteros ABCD, APCQ y PBQD son cuadrados.

$$AC = BD = PQ = a\sqrt{2}$$

POLIEDROS REGULARES

En un octaedro regular la distancia de un vértice al centro de cualquiera de las caras opuestas a dicho vértice es igual a la arista del octaedro.



G: Baricentro de la cara BPC

$$\mathrm{AG} = \mathrm{a}$$

$$\text{Área total} = 2\mathrm{a}^2\sqrt{3}$$

$$\text{Volumen} = \frac{\mathrm{a}^3\sqrt{2}}{3}$$

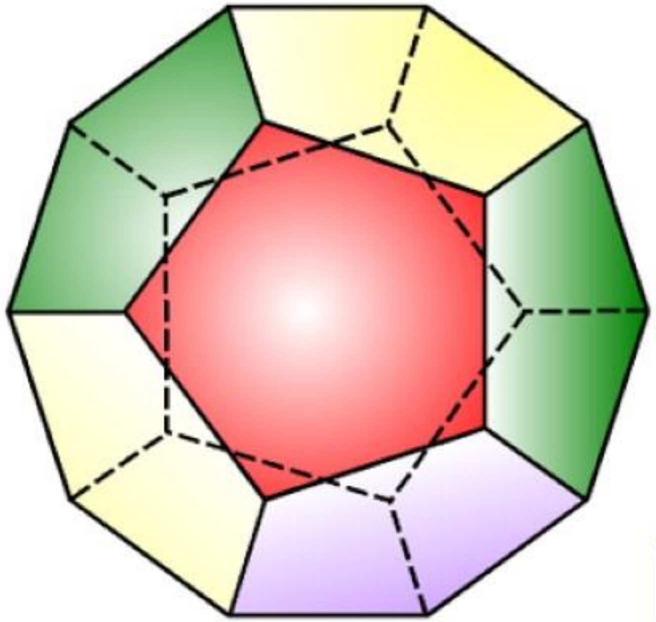
$$\begin{array}{c}\text{Medida de uno}\\ \text{de los diedros}\end{array} = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\mathrm{d}(\overline{\mathrm{AP}}, \overline{\mathrm{BC}}) = \frac{\mathrm{a}\sqrt{6}}{3}$$

POLIEDROS REGULARES

DODECAEDRO REGULAR

Esta limitado por doce regiones limitadas por pentágonos regulares unidas de tres en tres.



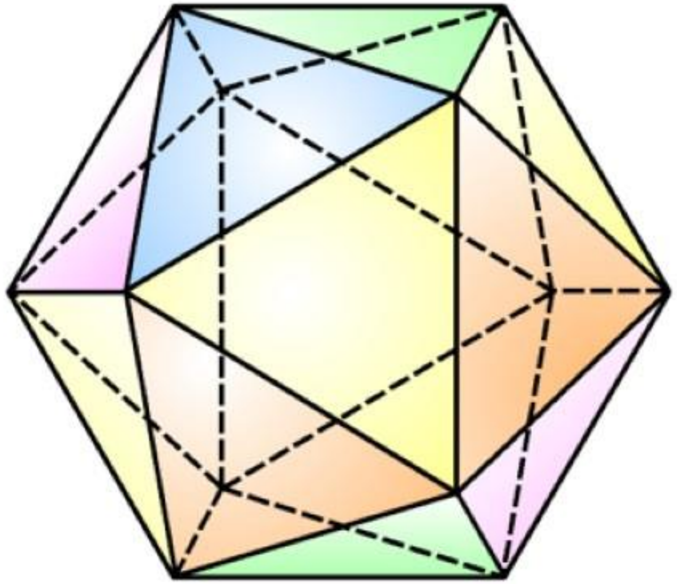
$$\text{Número de caras} = C = 12$$
$$\text{Número de vértices} = V = 20$$
$$\text{Número de aristas} = A = 30$$

$$D_{\text{DODECAEDRO}} = 100$$

POLIEDROS REGULARES

ICOSAEDRO REGULAR

Esta limitado por veinte regiones triangulares equiláteras unidas de cinco en cinco.



$$\text{Número de caras} = C = 20$$
$$\text{Número de vértices} = V = 12$$
$$\text{Número de aristas} = A = 30$$

$$D_{\text{ICOSAEDRO}} = 36$$

POLIEDROS REGULARES

POLIEDROS CONJUGADOS

Se llaman poliedros conjugados a aquellos poliedros regulares en que el número de caras de uno de ellos es igual al número de vértices del otro y viceversa.

Por el teorema de Euler se cumple que ambos poliedros tienen el mismo número de aristas.

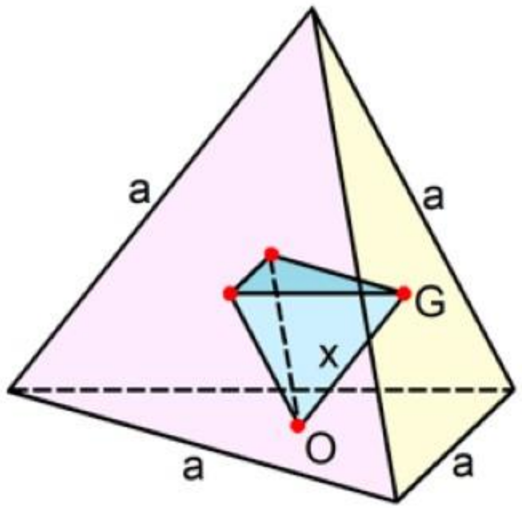
Son poliedros conjugados: el octaedro y el hexaedro, el icosaedro y el dodecaedro; el tetraedro es conjugado por si mismo.

POLIEDRO REGULAR	# de lados de cada cara	# de aristas en cada vértice	C	V	A
TETRAEDRO R.	3	3	4	4	6
HEXAEDRO R.	4	3	6	8	12
OCTAEDRO R.	3	4	8	6	12
DODECAED. R.	5	3	12	20	30
ICOSAEDRO R.	3	5	20	12	30

POLIEDROS REGULARES

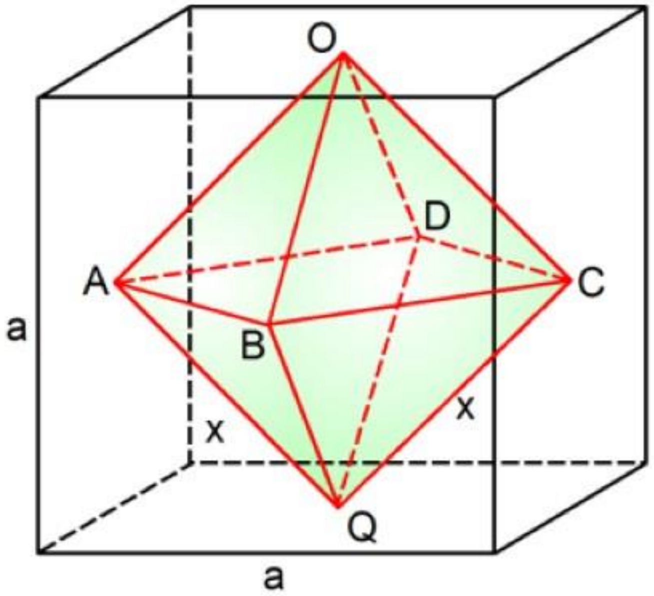
Los centros de las caras de un poliedro regular son los vértices de un poliedro conjugado al primero (poliedro conjugado inscrito).

Tetraedro regular inscrito en el tetraedro regular, cuyos vértices son los centros de las caras del primer tetraedro.



$$x = \frac{a}{3}$$

Octaedro regular inscrito en el hexaedro regular, los centros de las caras del cubo son los vértices del octaedro regular.

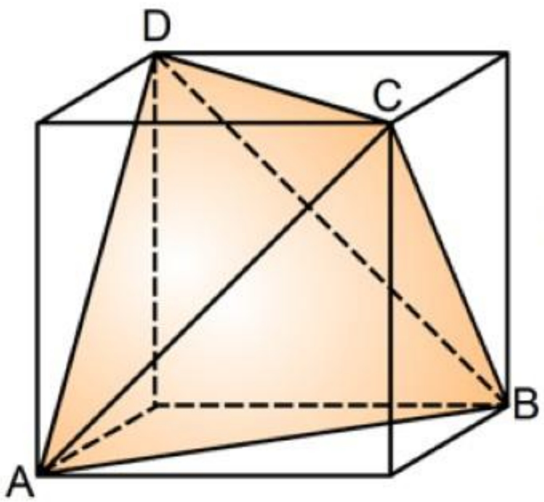


$$x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

POLIEDROS REGULARES

OBSERVACIONES

Tetraedro regular inscrito en un hexaedro regular, éste se obtiene al unir vértices no consecutivos del hexaedro.



ABCD: Tetraedro regular

TEOREMAS

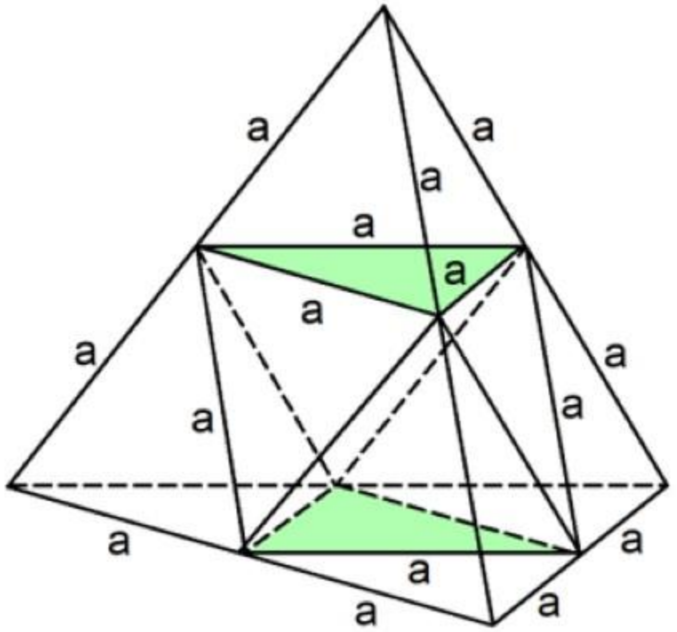
01. La razón de volúmenes entre el tetraedro y el hexaedro es 1/3.

02. Las aristas opuestas del tetraedro regular son perpendiculares.

03. La distancia entre dos aristas opuestas del tetraedro regular es la arista del cubo.

POLIEDROS REGULARES

Octaedro regular inscrito en el tetraedro regular, los puntos medios de las aristas del tetraedro regular son vértices de un octaedro regular.



TEOREMAS

01. La razón de volúmenes entre el tetraedro y el octaedro es 1/2.

02. Las distancia entre dos caras opuestas del octaedro regular es igual a la altura del tetraedro regular de igual arista.

POLIEDROS REGULARES

Ejemplo

La altura de un tetraedro regular mide $\sqrt{6}$, entonces el área total es igual a:

A) $2\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $9\sqrt{3}$

D) $3\sqrt{3}$ E) $8\sqrt{3}$

Ejemplo

¿Cuánto mide la arista de un cubo, si se sabe que la distancia de un vértice a una diagonal del cubo es $\sqrt{6}$?

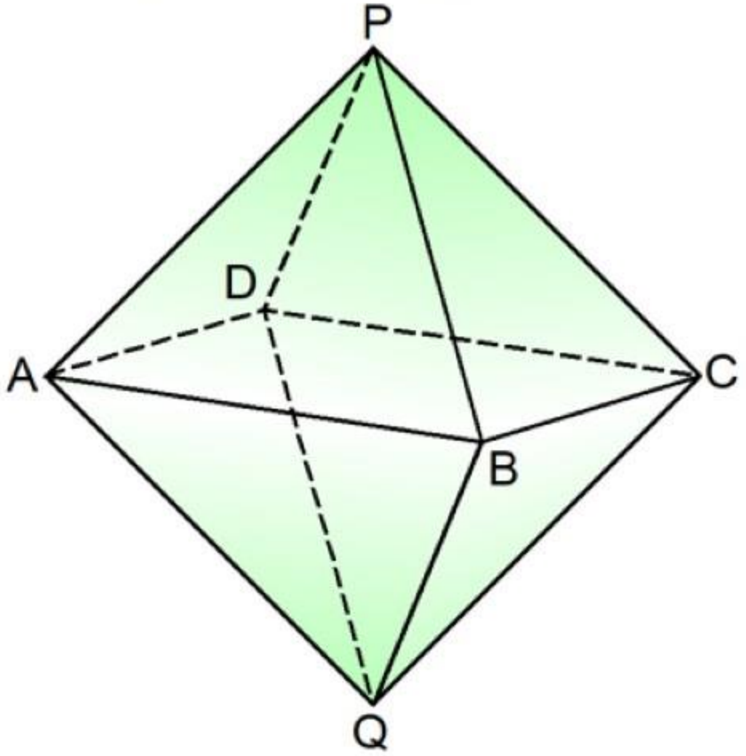
A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) 4

D) 3 E) $3\sqrt{2}$

POLIEDROS REGULARES

Ejemplo

En el octaedro regular mostrado calcular la medida del ángulo entre $\overline{AP}$ y $\overline{BC}$.



A) 90 B) 60 C) 45
D) 30 E) 75

Ejemplo

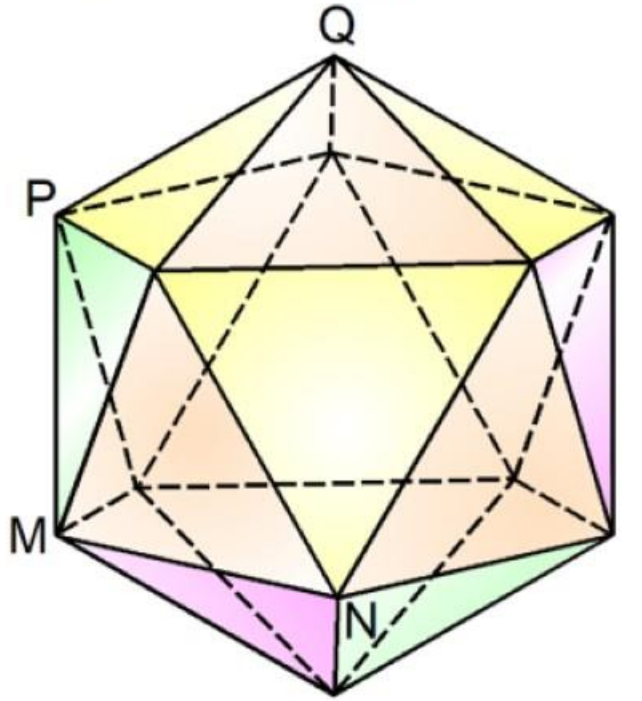
Calcular la suma de las medidas de los ángulos de todas las caras de un dodecaedro regular

A) 5 840 B) 6 480 C) 8 490
D) 7 280 E) 3 890

POLIEDROS REGULARES

Ejemplo

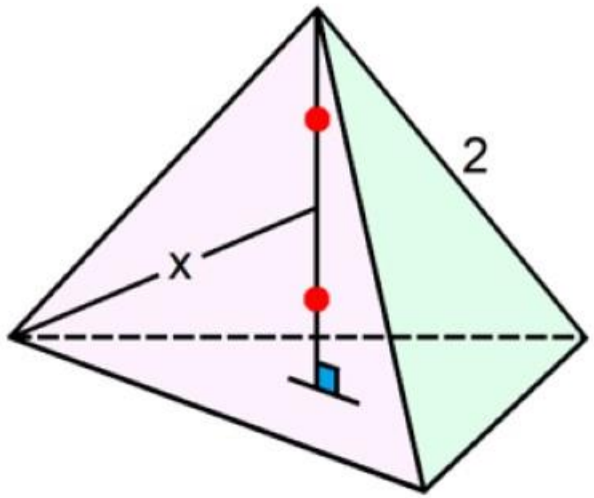
En el icosaedro regular mostrado, calcular la medida del ángulo entre $\overline{PQ}$ y $\overline{MN}$.



A) 30
B) 45
C) 60
D) 36
E) 72

Ejemplo

En la figura se muestra un tetraedro regular. Calcular el valor de x



A) $\sqrt{3}$
B) 2
C) 1,5
D) $\sqrt{2}$
E) $\sqrt{5}$

POLIEDROS REGULARES

Ejemplo

Calcular la razón entre los volúmenes de un octaedro regular y el de su poliedro conjugado inscrito.

A) 9/4 B) 9/2 C) 2/9
D) 1/3 E) 8/3

Ejemplo

En un octaedro regular M - ABCD - N la longitud de su arista es a. calcular la distancia entre los baricentros de las caras DMC y ABN.

A) $\frac{2a}{3}$ B) $\frac{a}{2}$ C) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ E) a

PROBLEMAS PROPUESTOS

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

01. Calcular el número de aristas que tendrá un poliedro convexo que está limitado por 30 regiones triangulares, 8 regiones pentagonales y 10 regiones limitadas por dodecágonos.

A) 224 B) 274 C) 125

D) 137 E) 182

Resolución:

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

02. ¿Cuántas diagonales tiene aquel poliedro formado por 6 cuadriláteros y 8 triángulos?

A) 36 B) 26 C) 24

D) 48 E) 30

Resolución:

Rpta. E

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

03. Un poliedro convexo está formado por pentágonos; si las caras fueran triángulos, se necesitarían 40 caras más para que el número de aristas no varíe. ¿Cuántas caras tiene el poliedro?

A) 45 B) 50 C) 60

D) 65 E) 80

Resolución:

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

04. Calcular el número de aristas de aquel poliedro convexo cuyo número de caras es igual al número de vértices, además la suma de las medidas de los ángulos de todas sus caras es 1 440.

A) 12 B) 8 C) 9
D) 10 E) 14

Resolución:

Rpta. D

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

05. Un poliedro convexo tiene como caras 12 triángulos, 16 cuadriláteros, 24 pentágonos y 13 hexágonos. Halle su número de vértices.

A) 84 B) 85 C) 86

D) 87 E) 88

Resolución:

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

06. Un poliedro convexo está limitado por x pentágonos regulares y z hexágonos regulares. Calcular el valor de x.

A) 8 B) 20 C) 15
D) 12 E) 10

Resolución:

Rpta. D

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

07. En un tetraedro regular, determine la medida del ángulo entre las medianas de dos caras, si las medianas no se intersecan.

A) $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ B) $\arccos\left(\frac{2}{3}\right)$ C) $\arccos\left(\frac{1}{6}\right)$

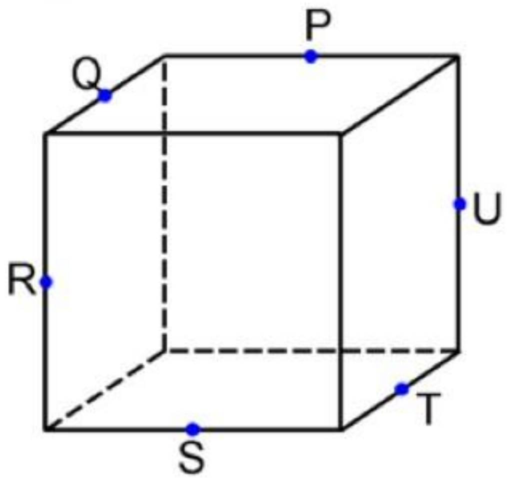
D) $\arccos\left(\frac{1}{7}\right)$ E) $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ (UNI 2013-I)

Resolución:

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

08. La figura representa un cubo de arista "a" cm. Calcule el área (en cm^2) del polígono PQRSTU, si P, Q, R, S, T, U son puntos medios de las aristas.



A) $2\sqrt{3}a^2$ B) $3\sqrt{2}a^2$ C) $3\sqrt{3}a^2$

D) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ E) $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ (UNI 2016-1)

Resolución:

Rpta. E

09. En un octaedro regular P-ABCD-Q, cuya arista mide a u. Calcule la distancia (en u) entre las aristas $\overline{PB}$ y $\overline{AQ}$.

A) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

D) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ E) $a\sqrt{2}$

Resolución:

Rpta. D

10. En un octaedro regular está inscrito un tetraedro cuyos vértices están situados en caras no consecutivas. ¿Cuál es la razón de áreas de estos poliedros regulares?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{4}{9}$

Resolución:

Rpta. D

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

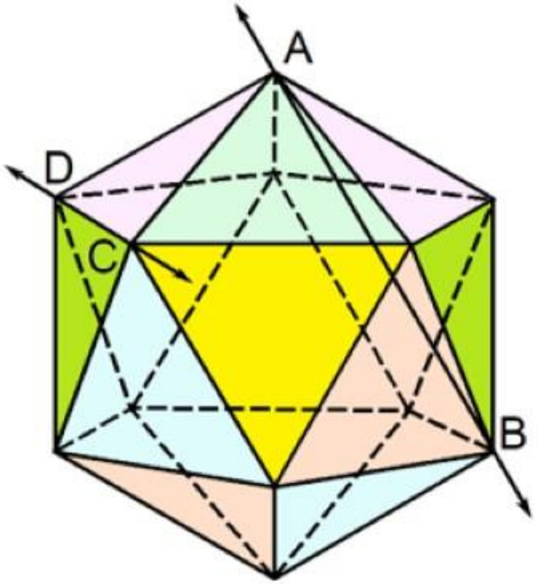
11. ABCDE, DEFGH y GHIJK son tres caras de un dodecaedro regular. Calcular la medida del ángulo entre $\overline{AC}$ y $\overline{HK}$.

A) 36 B) 45 C) 60
D) 72 E) 54

Resolución:

Rpta. C

12. En la figura se muestra un icosaedro regular, calcular la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.



A) 54 B) 72 C) 36
D) 60 E) 18

Resolución:

Rpta. B

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

13. Indique verdadero o falso:

I. En todos los poliedros regulares las aristas cruzadas son ortogonales.

II. En el icosaedro regular y en el dodecaedro se trazan 36 y 100 diagonales respectivamente.

III. El poliedro conjugado del octaedro regular es el hexaedro regular.

A) VVV B) VVF C) VFV

D) FVV E) FFV

Resolución:

Rpta. E

14. En un poliedro convexo la suma de los números de caras, vértices y aristas es igual a 42. Si las medidas de los ángulos de las caras suman 3240, entonces el número de caras del poliedro es:

A) 11 B) 12 C) 13

D) 14 E) 15 (5ta PC 2015-2)

Resolución:

Rpta. A

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

15. Un poliedro tiene una cara pentagonal, tres cuadrangulares y otras tantas triangulares. ¿Cuántas caras triangulares tiene, si la suma de las medidas de los ángulos de todas sus caras es igual a 2880?

A) 4 B) 5 C) 6

D) 7 E) 8

Resolución:

Rpta. C

16. Un poliedro está limitado sólo por caras triangulares y cuadrangulares. Si la suma de las medidas de los ángulos de todas sus caras es igual a 3600 y el número de diagonales de dicho sólido es igual a 29, calcule su número de aristas.

A) 15　　B) 17　　C) 21

D) 23　　E) 27

Resolución:

Rpta. D

17. Se tiene un tetraedro regular ABCD. Si la distancia del centro de la cara ABC a la altura del tetraedro trazada desde el vértice B es d, determina el volumen del tetraedro.

A) $\frac{2+\sqrt{3}}{16}\mathrm{d}^3$ B) $\frac{25\sqrt{5}}{4}\mathrm{d}^3$ C) $\frac{27\sqrt{6}}{4}\mathrm{d}^3$

D) $\frac{27\sqrt{7}}{14}\mathrm{d}^3$ E) $\frac{27\sqrt{24}}{8}\mathrm{d}^3$ (UNI 2015-2)

Resolución:

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

18. Halle la suma de las áreas de las secciones que determinan los planos de simetría en un hexaedro regular de arista a:

A) $3a^2(2\sqrt{2}+1)$ B) $3a^2(1+\sqrt{2})$ C) $3a^2(2+\sqrt{2})$

D) $3a^2\sqrt{2}$ E) $9a^2$

Resolución:

Rpta. A

19. Si el perímetro del desarrollo de la superficie lateral del octaedro mide 30 u; determine la superficie lateral del poliedro mencionado.

A) $14\sqrt{3}$ u²   B) $16\sqrt{3}$ u²   C) $18\sqrt{3}$ u²

D) $20\sqrt{3}$ u²   E) $22\sqrt{3}$ u²   (UNI 2013-2)

Resolución:

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

20. En un octaedro regular PABCDQ de arista a, G_1 y G_2 son baricentros de las caras opuestas ABP y QDC, M y N son puntos medios de $\overline{AQ}$ y $\overline{BC}$, halle la distancia entre las rectas que contienen a $\overline{G_1G_2}$ y $\overline{MN}$.

A) a/6 B) a/4 C) a/2

D) 3a/2 E) 3a/4

Resolución:

Rpta. B

FIN

MUCHAS GRACIAS